

Análisis Funcional – Evaluación 5

1. Sea

$$M = \left\{ f \in L_2[-1, 1] : \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 t f(t) dt = \int_{-1}^1 t^2 f(t) dt = 0 \right\}$$

Dada $f \in L_2[-1, 1]$ calcula $g \in M$ tal que $\|f - g\|_2 = \min \{\|f - h\|_2 : h \in M\}$.

En este ejercicio es importante que distingas entre funciones y valores que toma una función. Una función se representa por una letra, digamos por f , y un valor de la misma, $f(t)$, es un número.

2. Sea $\{C_n\}$ una sucesión de conjuntos convexos cerrados no vacíos en un espacio de Hilbert tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $C_{n+1} \subset C_n$, y C_1 es un conjunto acotado. Prueba que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

Sugerencia. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in C_n$ tal que $\|x_n\| = \text{dist}(0, C_n)$. Prueba usando la igualdad del paralelogramo que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.